

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE BESSEL E A CORRENTE OSCILANTE

PEIXOTO, R. M. S. *

DO NASCIMENTO, P. H. R. †

Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

JUL-2021, 2ª Edição, Volume 1.

Submitted: 24 mai.2021. Approved: 01 jul.2021.

RESUMO

A modelagem de muitos problemas do cotidiano é feita por intermédio das equações diferenciais (ED). O problema da corrente oscilante não é diferente disto e, por se tratar de um problema de fácil exibição e relativo entendimento, o discutiremos, neste artigo, com o objetivo de determinar e interpretar sua solução. Não discutiremos detalhadamente e nem apresentaremos a teoria que trata das equações e das funções de Bessel, entretanto, apresentaremos a teoria que envolve a transformação de uma equação de Bessel singular (não exibida em sua forma padrão) em sua forma padrão, as quais exibem a solução geral como combinação linear de funções de Bessel de primeira e segunda espécies. Por fim, de posse da solução da equação de Bessel que modela o problema da corrente pesada oscilante, constataremos que o movimento periódico depende exclusivamente de seu comprimento e a sequência de tempos de oscilação exibe a tendência do movimento a um regime estacionário.

Palavras-chave: Corrente oscilante, Equações de Bessel, Transformações de EDO.

ABSTRACT

The modeling of many everyday problems is done through differential equations (DE). The oscillating current problem is no different from this and, since it is a problem that is easy to display and relatively understandable, we will discuss it in this article, with the aim of determining and interpreting its solution. We will not discuss in detail nor present the theory that deals with Bessel's equations and functions, however, we will present the theory that involves transforming a singular Bessel equation (not shown in its standard form) into its standard form, which exhibit the general solution as a linear combination of first and second species Bessel functions. Finally, having the solution of the Bessel equation that models the problem

of the oscillating heavy current, we will find that the periodic movement depends exclusively on its length and the sequence of oscillation times shows the tendency of the movement to a stationary regime.

Keywords: Oscillating Chain, Bessel equations, ODE transformations.

Sumário

Sumário	1
Introdução	1
Equação de Bessel	2
Transformações de EDO de Bessel na forma padrão	3
O problema da corrente oscilante	5
Conclusões	7
Referências	7

INTRODUÇÃO

Segundo Cannon e Dostrovsky (2012, p. 53), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Leonhard Euler (1707-1783) discutiram o problema da oscilação de uma corrente suspensa por uma de suas extremidades em São Petersburgo, Rússia, antes da sua partida, em 1733, para a Universidade de Basileia, na Suíça. Bernoulli modelou o problema para peque-

*Rafael Martins dos Santos Peixoto. Bacharel em Ciências Exatas e Tecnológicas pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) e graduando no curso de Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Brasil (Lattes). E-mail: rafaelmartinspeixoto@hotmail.com

†Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento. Licenciado em Matemática pela Universidade Católica do Salvador (UCSal) e Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFRB). Filiação: Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC)/ Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Brasil (Lattes). E-mail: nascimento.p@ufrb.edu.br

nas oscilações, obtendo a equação do movimento e a sua solução dadas, respectivamente, por equações e funções de Bessel, em 1732, 52 anos antes do nascimento de Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) (BARICZ, 2010, p. 7). De acordo com WATSON (1995, p. 3), Bernoulli publicou, em 1738, um livro de memórias contendo enunciados de vários teoremas sobre as oscilações de correntes pesadas.

Neste artigo, encontramos a solução para o problema de uma corrente oscilante pesada, modelando-o e obtendo uma equação EDO linear e a transformando em uma equação de Bessel. Para tal, apresentamos algumas manipulações necessárias para transformações de EDO lineares homogêneas de segunda ordem para equações de Bessel no formato padrão.

Por fim, os métodos expostos neste trabalho podem ser replicados em outros problemas que sejam coerentes com o cálculo aplicado na solução do problema corrente como, por exemplo, no problema da flambagem lateral de vigas quando fletida no seu plano possui, na direção ortogonal, pequeno momento de inércia à flexão ou à torção, ou ainda na estabilidade global de pórticos sob a ação de cargas verticais (VASCONCELOS, 1990).

EQUAÇÃO DE BESSEL

Segundo WATSON (1995, p. 1), as equações de Bessel derivam, por transformações elementares, das equações de Riccati e, segundo Butkov (1988, p. 136), as funções de Bessel surgem como solução destas, ao utilizar o método de Frobenius.

Conforme BARICZ (2010, p. 7), o resultado das funções de Bessel foi resultado do seu estudo de um problema do astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) para determinar o movimento de três corpos sob gravitação mútua, e sua teoria é frequentemente usada ao resolver, por exemplo, problemas de hidrodinâmica, acústica, física de rádio, física atômica e nuclear e teoria da informação. Essas funções também são eficazes para resolver problemas da mecânica das ondas e teoria da elasticidade.

Uma EDO de Bessel de ordem ν é dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (1)$$

Suas soluções são conhecidas como funções cilíndricas e, entre estas, as mais conhecidas são as funções de Bessel (BUTKOV, 1988, p. 359).

Considere a solução da equação (1) sob a forma de uma série de Frobenius:

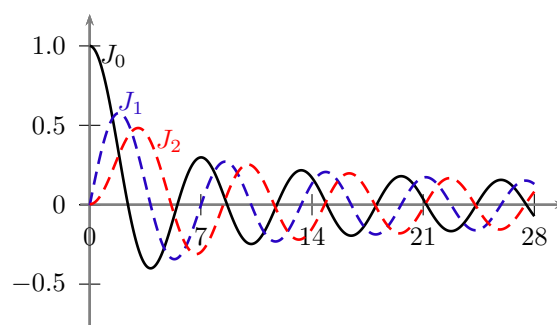
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}. \quad (2)$$

Após substituir a série (2) na equação (1), obtém-se uma equação (equação indicial) com as raízes $s = +\nu$ e $s = -\nu$. Para determinar a série, devemos encontrar seus coeficientes que dependem de ν . A fórmula de recorrência dada por uma equação com os coeficientes da série, considerando a raiz positiva, gera uma série explícita para a solução, que é representada pela Equação 3, chamada de função de Bessel de primeira espécie de ordem ν ($J_\nu(x)$) (SANTOS A.; DO NASCIMENTO, 2020, p. 7):

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1) 2^{\nu+2k}} x^{\nu+2k}. \quad (3)$$

A série (3) converge (pelo teste da razão) para todos os valores de x , não importa qual o valor de ν (BUTKOV, 1988, p. 360).

Figura 1 – Funções de Bessel J_0 , J_1 e J_2



Fonte – Autores usando L^AT_EX 2_ε/PSTricks.

A Figura 1 ilustra o comportamento das funções de Bessel de primeira espécie quando $\nu = 0, 1, 2$.

Raciocínio análogo pode ser realizado para obter:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1) 2^{2k-\nu}} x^{2k-\nu}. \quad (4)$$

Obtemos, assim, um par de soluções para a EDO (1). Essas funções constituem um par linearmente independente se o seu wronskiano

$$\left[W(J_{\nu}, J_{-\nu}) = -2 \frac{\text{sen}(\nu\pi)}{x\pi} \right]$$

é diferente de zero (SANTOS A.; DO NASCIMENTO, 2020, p. 8) e a solução geral da equação (1) é dada por:

$$y(x) = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \quad (5)$$

Entretanto, se $W(J_{\nu}, J_{-\nu}) = 0$, a segunda solução da equação geral (5) pode possuir singularidades, perdendo a linearidade do par de soluções. Desse modo, podemos supor que a outra solução seja da forma:

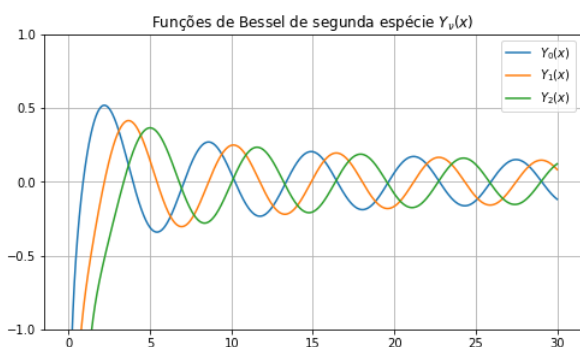
$$\Phi(x) = \varphi(x) J_{\nu}(x). \quad (6)$$

Com as devidas manipulações matemáticas (SANTOS A.; DO NASCIMENTO, 2020, p. 8), obtemos:

$$\Phi(x) = J_{\nu}(x) \int \frac{dx}{\underbrace{x[J_{\nu}(x)]^2}_{\varphi(x)}}. \quad (7)$$

A função em (7) é chamada **função de Bessel de segunda espécie de ordem ν** ou **função de Neumann de ordem ν** e denotada por $Y_{\nu}(x)$, para todo $\nu \in \mathbb{R}$.

Figura 2 – Funções de Neumann Y_0 , Y_1 e Y_2



Fonte – Elaborada pelo Autor

A Figura 2 ilustra o comportamento das funções de Bessel de segunda espécie quando $\nu = 0, 1, 2$.

Assim, a solução da equação (1) para $2\nu \in \mathbb{Z}$ é dada por:

$$y(x) = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 Y_{\nu}(x). \quad (8)$$

EDO DE BESSEL NA FORMA PADRÃO

Na prática, é raro modelar um problema por uma EDO e esta se apresentar como uma equação de Bessel que esteja na forma padrão (1). Dessa forma, apresentaremos um resultado em que certas EDO lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes variáveis, quando submetidos a certas transformações de variáveis dependentes ou independentes, sejam convertidas em:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (9)$$

Apesar da dificuldade em se identificar qual destas transformações deve ser usada, temos como objetivo obter a forma padrão da equação de Bessel, uma vez que nessa forma, sua solução é determinada, apenas, pelo conhecimento de seus coeficientes.

Um resultado que abrange a maioria dos casos das transformações de EDO de Bessel é:

Proposição 1. *A EDO da forma*

$$z^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2} + (1-2\alpha)z \frac{d\psi}{dz} + [\beta^2 \gamma^2 z^{2\gamma} + \alpha^2 - \nu^2 \gamma^2] \psi = 0, \quad (10)$$

com α, β, γ e ν constantes, podem ser reduzidas a uma EDO de Bessel padrão, se efetuarmos a seguinte mudança de variáveis:

$$t = \beta z^{\gamma} \quad (11)$$

$$\psi = z^{\alpha} p, \quad (12)$$

obtendo-se:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dp}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) p = 0, \quad (13)$$

cujas soluções são:

$$p(t) = C_1 J_{\nu}(t) + C_2 Y_{\nu}(t). \quad (14)$$

Conseqüentemente, a solução de (10) é:

$$\psi(z) = C_1 z^\alpha J_\nu(\beta z^\gamma) + C_2 z^\alpha Y_\nu(\beta z^\gamma). \quad (15)$$

A função Y_ν pode ser substituída por $J_{-\nu}$, caso $\nu \notin \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Derivando, respectivamente, as equações (11) e (12) com respeito à variável z , temos:

$$\frac{dt}{dz} = \beta \gamma z^{\gamma-1}. \quad (16)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \alpha z^{\alpha-1} p + z^\alpha \frac{dp}{dt} \frac{dt}{dz}. \quad (17)$$

Derivando a equação (17) com respeito à variável z , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dz^2} &= \frac{dp}{dt} (\beta \gamma \alpha z^{\alpha+\gamma-2}) + (p \alpha^2 z^{\alpha-2} - p \alpha z^{\alpha-2}) \\ &+ \frac{dp}{dt} (\beta \gamma \alpha z^{\alpha+\gamma-2}) + \frac{dp}{dt} (\beta \gamma^2 z^{\alpha+\gamma-2}) \\ &- \frac{dp}{dt} (\beta \gamma z^{\alpha+\gamma-2}) + \frac{d^2p}{dt^2} (\beta^2 \gamma^2 z^{\alpha+2\gamma-2}) \end{aligned} \quad (18)$$

Multiplicando por z^2 a equação (18) e por $(1 - 2\alpha)z$ a equação (17), obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} z^2 \frac{d^2\psi}{dz^2} &= \frac{dp}{dt} (\beta \gamma \alpha z^{\alpha+\gamma}) + (p \alpha^2 z^\alpha - p \alpha z^\alpha) \\ &+ \frac{dp}{dt} (\beta \gamma \alpha z^{\alpha+\gamma}) + \frac{dp}{dt} (\beta \gamma^2 z^{\alpha+\gamma}) \\ &- \frac{dp}{dt} (\beta \gamma z^{\alpha+\gamma}) + \frac{d^2p}{dt^2} (\beta^2 \gamma^2 z^{\alpha+2\gamma}). \end{aligned} \quad (19)$$

$$(1 - 2\alpha)z \frac{d\psi}{dz} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &= p \alpha z^\alpha - 2p \alpha^2 z^\alpha + \frac{dp}{dt} (\beta \gamma z^{\alpha+\gamma}) \\ &- \frac{dp}{dt} (2\beta \gamma \alpha z^{\alpha+\gamma}). \end{aligned} \quad (21)$$

Substituindo as equações (19), (21) e (12) na equação (10), obtemos:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{1}{\beta z^\gamma} \frac{dp}{dt} + \left(p - \frac{\nu^2 p}{\beta^2 z^{2\gamma}} \right) = 0. \quad (22)$$

Agora, substituindo a equação (11) na equação (23) e reorganizando, obtemos:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dp}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2} \right) p = 0. \quad (23)$$

Como queríamos demonstrar.

A seguir, temos dois exemplos onde utilizamos o resultado obtido na Proposição 1.

Exemplo 1. Considere a EDO linear e homogênea de segunda ordem

$$z^2 \frac{d^2\psi}{dz^2} + az \frac{d\psi}{dz} + bz^2\psi = 0. \quad (24)$$

onde a e b são constantes positivas. Para determinar sua solução, aplicaremos o resultado visto na Proposição 1. Igualando os coeficientes das equações (10) e (25), obtemos: $\alpha = 1 - a$, $\gamma = 1$, $\beta = \pm\sqrt{b}$, $\nu = \pm(1 - a)$. Dessa forma, uma solução da equação (25) é:

$$\psi(z) = C_1 z^{1-a} J_{1-a}(z) + C_2 z^{1-a} Y_{1-a}(z). \quad (26)$$

Exemplo 2. Considere a EDO linear e homogênea de segunda ordem

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} + \left(z^2 + \frac{3}{4z^2} \right) \psi = 0. \quad (27)$$

Para encontrar sua solução, aplicaremos o resultado visto na Proposição 1.

Uma vez igualado os coeficientes, temos que a equação (10) é equivalente a (27) se fizermos: $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\nu = \pm\frac{1}{2}$ e a sua solução (Equação 27) é dada por:

$$\psi(z) = C_1 z J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}z^2\right) + C_2 z J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}z^2\right). \quad (28)$$

Exemplo 3. Considere a EDO linear e homogênea de segunda ordem

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (29)$$

A equação (10) tem paridade com a (29) se fizermos: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $\beta = k$, $\nu = \pm\frac{1}{2}$. Portanto, sua solução (equação (29)) é dada por:

$$\psi(z) = C_1 z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(kz) + C_2 z^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(kz). \quad (30)$$

Naturalmente, nos casos os quais as EDO de Bessel que não estão na forma padrão e não se aplica à Proposição 1, é necessário outra mudança de variável dependente ou independente e podem ser vistas em (RELTON, 1946, p. 38), (WATSON, 1995, p. 105) e (KÁRMÁN; BIOT, 1942, p. 77).

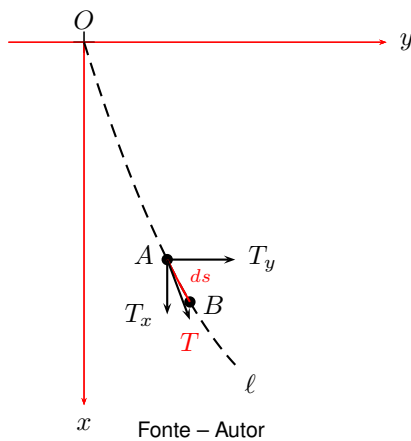
O PROBLEMA DA CORRENTE OSCILANTE

Considere uma corrente pesada flexível ℓ (ver Figura 3), de comprimento L , massa m e densidade linear $\rho = \frac{m}{L}$.

Se ℓ está suspensa por uma de suas extremidades O (origem de um sistema cartesiano ortogonal yx), a intensidade do seu peso $P = mg = \rho Lg$, em que g é a intensidade da aceleração da gravidade, provoca uma tração de intensidade T , em um ponto arbitrário $A(y, x) \in \ell$.

Seja s o valor do comprimento de corrente existente entre os pontos O e A , e $B \in \ell$ um ponto muito próximo de A , ou seja, $s + ds$.

Figura 3 – Corrente pesada engastada



Dessa forma, a intensidade T da força de tração no ponto A é dada por:

$$T = \rho g(L - s). \quad (31)$$

Como a corrente não resiste à flexão, a força de tração T é tangente a qualquer ponto da corrente deformada e sua decomposição em relação aos eixos y e x nos dá vetores de intensidade:

$$T_x = T \cos(\phi) \quad (32)$$

$$T_y = T \sin(\phi), \quad (33)$$

em que ϕ é o ângulo formado entre o vetor T e o eixo vertical.

Entre os pontos A e B ocorre variação da intensidade na componente horizontal da tração T .

Através de uma manipulação matemática e utilizando a equação (33), segue que:

$$\begin{aligned} dT_y &= \frac{\partial T_y}{\partial s} ds = \frac{\partial}{\partial s} [T \sin(\phi)] ds \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left[T \frac{\partial y}{\partial s} \right] ds \end{aligned} \quad (34)$$

Como T_y provoca oscilação na corrente de massa $m = \rho ds$, a força resultante $\frac{dT_y}{ds}$ que gera o movimento de aceleração $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, nos dá, pela segunda lei de Newton:

$$\frac{dT_y}{ds} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (35)$$

em que t é a variável tempo.

Comparando-se as equações (34) e (35) e considerando a condição imposta pela equação (31), encontramos a expressão que rege o movimento oscilatório:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[g(L - s) \frac{\partial y}{\partial s} \right] \quad (36)$$

Usando o método de separação de variáveis (BUTKOV, 1988, p. 295), duas possíveis soluções para a equação (36) são:

$$y_1(s, t) = u(s) \cos(\omega t + \phi_0) \quad (37)$$

$$y_2(s, t) = v(s) \sin(\omega t + \phi_0) \quad (38)$$

em que ω é a velocidade angular descrita no movimento e ϕ_0 é a constante de fase.

Substituindo y_1 (equação (37)) na equação (36), obtemos:

$$(L - s) \frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{du}{ds} + \frac{\omega^2}{g} u = 0 \quad (39)$$

Para identificarmos que (39) é uma equação de Bessel, vamos efetuar a seguinte mudança de variáveis:

$$z = (L - s) \quad (40)$$

$$u(s) = \psi(z) \quad (41)$$

$$\frac{\omega^2}{g} = \kappa^2. \quad (42)$$

Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem da Equação 41 e, efetuando-se as de-

vidas substituições, obtemos:

$$z^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2} + z \frac{d\psi}{dz} + \kappa^2 z \psi = 0 \quad (43)$$

A equação (43), claramente, ainda não está na forma padrão de Bessel. Sendo assim necessário uma mudança nas variáveis dependente e independente.

Comparando a equação (43) com a equação (10) da Proposição 1, temos:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0. \\ \gamma &= \frac{1}{2}. \\ \beta &= 2\kappa. \\ \nu &= 0. \end{aligned}$$

e a equação (43) toma a forma:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dp}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) p = 0. \quad (44)$$

cuja solução, para $t > 0$, é dada por:

$$p(t) = C_1 J_0(t) + C_2 Y_0(t). \quad (45)$$

Substituindo nas equações (11) e (12) os valores das constantes α , γ e β obtidos e, em seguida, os de p e t na equação (45), temos:

$$\psi(z) = C_1 J_0(2\kappa\sqrt{z}) + C_2 Y_0(2\kappa\sqrt{z}). \quad (46)$$

Substituindo-se na equação (46) as igualdades das equações (40) e (41), temos:

$$u(s) = C_1 J_0(2\kappa\sqrt{L-s}) + C_2 Y_0(2\kappa\sqrt{L-s}), \quad (47)$$

em que $0 < s < L$.

Observa-se com as oscilações da corrente que os valores de $y(s, t) = u(s) \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$ devem ser finitos, mais especificamente, entre 0 e L , e como os valores de $Y_0(2\kappa\sqrt{L-s})$ decrescem indefinidamente quando os valores de s se aproximam de L (ver Figura 2), a solução a ser considerada é

$$u(s) = C_1 J_0(2\kappa\sqrt{L-s}), \quad 0 < s < L. \quad (48)$$

Na extremidade O da corrente (ver figura 3), temos $y(s, t) = 0$. Portanto, $u(s) = 0$, para $s = 0$, obtendo:

$$u(0) = C_1 J_0(2\kappa\sqrt{L}) = 0. \quad (49)$$

Como não queremos a solução trivial, consideramos $C_1 \neq 0$ e $2\kappa\sqrt{L}$ são os zeros de J_0 . Na tabela 1 apresentamos alguns zeros de J_0 que foram obtidos utilizando um código *Python*, a seguir, por meio do *SciPy* (biblioteca *open source*), executado na plataforma *Google Colaboratory*,

```
import scipy.special as sc
x = sc.jn_zeros(0,5)
```

Tabela 1 – Raízes ξ_n da equação $J_0(\xi) = 0$

n	ξ_n
1	2,405
2	5,520
3	8,654
4	11,792
5	14,931

Fonte – Elaborada pelo autor

Portanto, para cada raiz ξ_n de J_0 , o movimento periódico possuirá um valor para a velocidade angular $\omega = 2\pi f$, em que f é a frequência da oscilação da corrente ℓ . Deste modo, o período de ℓ , considerando a primeira raiz de J_0 é:

$$2 \cdot \underbrace{\frac{2\pi f}{\sqrt{g}}}_{\kappa} \cdot \sqrt{L} = 2,405.$$

Segue que:

$$\mathcal{T} = \frac{4\pi}{2,405} \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (50)$$

Observe que, no problema da corrente pesada flexível, as oscilações não dependem de sua densidade ρ , isso ocorre por que não existe peso anexado em sua extremidade, como no caso do pêndulo simples que, segundo [Young e Freedman \(2008, p. 53\)](#), considerando apenas pequenas oscilações, o período dependerá, exclusivamente, do seu comprimento e a força restauradora, que é um componente do peso da partícula, é proporcional à massa da partícula. Além disso, ao compararmos os movimentos, com pequenas oscilações, de uma corrente pesada e de um pêndulo simples, ambos

com o mesmo comprimento, verificamos que o período na primeira oscilação da corrente, vale 83,1% do período do pêndulo simples.

Para os demais valores das raízes de J_0 é possível obter os demais períodos de oscilação do movimento da corrente pesada.

Tabela 2 – Período de oscilação para cada raiz de J_0

n	ξ_n	\mathcal{T}
2	5,520	$\frac{4\pi}{5,520} \sqrt{\frac{L}{g}}$
3	8,654	$\frac{4\pi}{8,654} \sqrt{\frac{L}{g}}$
4	11,792	$\frac{4\pi}{11,792} \sqrt{\frac{L}{g}}$
5	14,931	$\frac{4\pi}{14,931} \sqrt{\frac{L}{g}}$

Fonte – Elaborada pelo autor

Com os valores obtidos na tabela 2, nota-se que, com o avançar do tempo, teremos períodos cada vez menores, ou seja, a corrente irá parar.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado o estudo do problema de uma corrente pesada oscilante, inicialmente feito por Bernoulli, em 1732. Para isso, foi obtido a equação que rege este movimento, uma EDO linear e homogênea de segunda ordem. Com o auxílio de algumas mudanças de variáveis foi possível transformá-la em uma EDO de Bessel no formato padrão e, conseqüentemente, obtivemos sua solução como uma combinação linear de funções de Bessel de primeira e segunda espécies. Devido à sua condição de fronteira, $y(s, t) = 0$, (Dirichlet) pré estabelecida, foi possível observar que as oscilações da corrente não dependem da sua densidade, apenas do seu comprimento, e que o movimento tende a parar.

BARICZ, Á. **Generalized Bessel Functions of the First Kind**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010. (Lecture Notes in Mathematics). ISBN 9783642122309. Citado na página 2.

BUTKOV, E. **Física matemática**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1988. 136-295-360 p. ISBN 9788521611455. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 5.

CANNON, J.; DOSTROVSKY, S. **The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742: Vibration Theory from 1687 to 1742**. [S.l.]: Springer New York, 2012. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences). ISBN 9781461394617. Citado na página 1.

KÁRMÁN, T. V.; BIOT, M. **Mathematical Methods in Engineering: An Introduction to the Mathematical Treatment of Engineering Problems**. [S.l.]: Academic Bunka Publishing Co., Ltd., 1942. Citado na página 4.

RELTON, F. **Applied Bessel Functions**. [S.l.]: Blackie, 1946. Citado na página 4.

SANTOS A.; DO NASCIMENTO, P. H. R. D. **Solução de um problema de flambagem de coluna utilizando equações de Bessel**. Aceito e a ser publicado. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

VASCONCELOS, A. C. D. **A origem das funções de Bessel com algumas aplicações em problemas estruturais**. *Boletim Técnico do Departamento de Engenharia Estrutural e Fundações da EPUSP (BT/PEF-9006)*, 1990. Citado na página 2.

WATSON, G. N. **A treatise on the theory of Bessel functions**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9780521483919. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.

YOUNG, H.; FREEDMAN, R. **Sears & Zemansky física II: termodinâmica e ondas**. [S.l.]: ADDISON WESLEY BRA, 2008. ISBN 9788588639331. Citado na página 6.