

# SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO DE UMA VIGA UTILIZANDO EQUAÇÕES DE BESSEL

do NASCIMENTO, P. H. R. \* dos SANTOS, J. M. †

Submitted: 06 ago.2022. Approved: 04 out. 2022.

Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas  
ABR-2023, 4ª Edição, Volume 1.

## RESUMO

Neste artigo, abordaremos a flambagem lateral com torção (FLT), um problema caracterizada pela combinação dos esforços de flexão e torção. Tal fenômeno pode constituir um estado limite último relacionado à estabilidade. Sua modelagem foi feita considerando esses esforços, através de uma EDO de Riccati que pôde ser transformada numa EDO de Bessel e cujo resultado encontrado representa a carga crítica máxima que uma viga engastada pode suportar, sem que ocorra a flambagem lateral com torção.

**Palavras-chave:** EDO Bessel. Flambagem. Torção. Vigas.

## ABSTRACT

In this article, we will address lateral torsional buckling (LTB), a problem characterized by the combination of bending and torsional stresses. Such a phenomenon may constitute an ultimate limit state related to stability. Its modeling was done considering these efforts, through a Riccati ODE that could be transformed into a Bessel ODE and whose result found represents the maximum critical load that a cantilever beam can support, without lateral buckling with torsion.

**Keywords:** Bessel ODE. Buckling. Torsion. Beam.

## Sumário

Sumário	1
Introdução	1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	2
Equações Diferenciais de Bessel	2
Esforços mecânicos sobre uma viga	5
Tensão e deformação	5
Raio de curvatura de uma curva plana	7

Flexão e deflexão	8
Torção	10
Flambagem lateral	13
APLICAÇÃO	13
CONSIDERAÇÕES FINAIS	15
Referências	15

## INTRODUÇÃO

Este artigo trata da solução de um problema de flambagem lateral com torção (FLT) de uma viga engastada sobre a ação de uma carga  $P$  em sua extremidade livre, que foi abordado por Vasconcelos (1990, p. 20-22) e cuja solução é apresentada em termos de funções de Bessel de primeira espécie e tem por objetivo ampliar seu alcance a leitores das Ciências Exatas.

A resolução do problema foi feita através da modelagem por uma EDO, obtida utilizando-se da teoria de resistência dos materiais e da equação de curvatura de uma curva, produzindo uma equação de Riccati que, em seguida, é transformada em uma EDO de Bessel com parâmetro  $\nu = 1/4$ . Estes procedimentos são análogos ao executados no artigo supracitado. Entretanto, a solução aqui apresentada se dá em termos de uma função de Bessel de primeira espécie e outra, de segunda. Então, determinamos a carga crítica de flambagem lateral com torção.

As vigas são elementos relevantes para compor vários tipos de projetos de construção. São elementos estruturais que suportam principalmente, cargas aplicadas perpendicularmente ao seu eixo longitudinal. Sua aplica-

\*Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento. Licenciado em Matemática pela Universidade Católica do Salvador (UCSal) e Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFRB). Filiação: Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CETEC)/ Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Brasil. E-mail: nascimento.p@ufrb.edu.br

†Jean Monteiro dos Santos. Bacharel em Ciências Exatas e Tecnológicas pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Graduando em Engenharia Mecânica na Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Brasil. E-mail: jeanmdsan-tos@hotmail.com



ISSN:  
2763-8855

RECT  
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas



ção é vasta, sendo frequentemente utilizada para receber cargas de veículos, lages, pessoas e outras sobrecargas. Além do mais, as vigas podem ter diversos materiais e tamanhos. Os materiais que constituem as vigas são: Madeira, metal e concreto armado. As vigas são continuamente submetidas a esforços que podem provocar fenômenos indesejados que devem ser considerados no projeto de elementos mecânicos e na construção de edificações e, a depender das condições de aplicação, o efeito da flambagem lateral com torção (FLT) deve ser controlado, para que a viga atue em condições seguras.

A flambagem lateral com torção (FLT) é um modo de flambagem em que o estado limite último se dá pela perda de instabilidade. Considerando vigas de estrutura metálica, este fenômeno é promovido por meio de deformações concebidas pela combinação de torção e deslocamento lateral. Estas deformações são notadas com o aumento da carga aplicada até que seja atingida a carga crítica ou momento crítico.

As funções de Bessel são nomeadas em homenagem ao astrônomo Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), no entanto, é geralmente creditado a Daniel Bernoulli (1700-1782) como sendo o primeiro a introduzir o conceito de funções de Bessel, em 1732. Bernoulli encontrou uma solução do problema de corrente oscilante suspensa verticalmente numa das extremidade em termos de uma série de potências. Em 1764, Leonhard Euler (1707-1783) empregou, numa análise das vibrações de uma membrana esticada, uma investigação que foi posteriormente desenvolvida por John William Strutt (Lord Rayleigh), em 1878, onde demonstrou que as funções de Bessel são casos particulares das funções de Laplace. Bessel, apesar de receber crédito por essas funções, não as incorporou em seu trabalho como astrônomo até 1817. A função de Bessel foi o resultado do estudo de Bessel de um problema de Kepler para determinar o movimento de três corpos movendo-se sob gravitação mútua. Em 1824, ele incorporou as funções de Bessel em um estudo de perturbações planetárias onde as funções de Bessel aparecem como coeficientes em uma expansão em série da perturbação indireta de um planeta, ou seja, o movimento do Sol causado pelo corpo perturbador. Foi provavelmente o trabalho de Lagrange, em órbitas elípticas, que primeiro sugeriu a Bessel para trabalhar nas funções de Bessel (BARICZ, 1994, p. 7). Hoje em dia, os coeficientes de Bessel e suas extensões, as funções de Bessel, aparecem em diversos problemas matemáticos e físicos.

Este artigo está estruturado da seguinte forma. Na fundamentação teórica, são apresentados os conceitos que delimitam o tema de pesquisa deste trabalho. Na primeira subseção, a equação diferencial de Bessel foi

definida e, por meio da combinação linear de funções de Bessel de primeira e segunda espécies, a solução desta é obtida. Na subseção Esforços mecânicos, são abordados alguns conceitos da resistência dos materiais como tensão e deformação, torção, flexão e flambagem. Estes conceitos são fundamentais para o entendimento e desenvolvimento do problema que será abordado. Na seção Aplicação, apresentamos o problema de flambagem lateral com torção (FLT) para uma viga engastada sob à ação de uma carga  $P$  em sua extremidade livre é solucionado, encontrando assim, a carga crítica para flambagem, concluindo assim o trabalho.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### Equações Diferenciais de Bessel

Nesta seção, definiremos a equação diferencial de Bessel e apresentaremos duas classes de soluções que dependem do valor do seu parâmetro. A primeira dessas, para valores do parâmetro não inteiros, se apresenta como combinação linear de funções de Bessel de primeira espécie, obtidas pela método de Frobenius, e a segunda, pelo método de d'Alembert, obtendo assim a solução como combinação linear de funções de Bessel de primeira e segunda espécies.

Uma EDO de Bessel de ordem  $\nu$  é dada por:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (1)$$

Como a EDO linear homogênea de segunda ordem dada pela Equação (1) possui uma singularidade em  $x = 0$ , uma solução pode ser escrita como uma série de Frobenius em torno dessa singularidade (NASCIMENTO; SANTOS, 2020, p. 4-5), ou seja,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}, a_0 \neq 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ao substituir a Equação (2) e suas derivadas de primeira e de segunda ordem

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad (3)$$

e

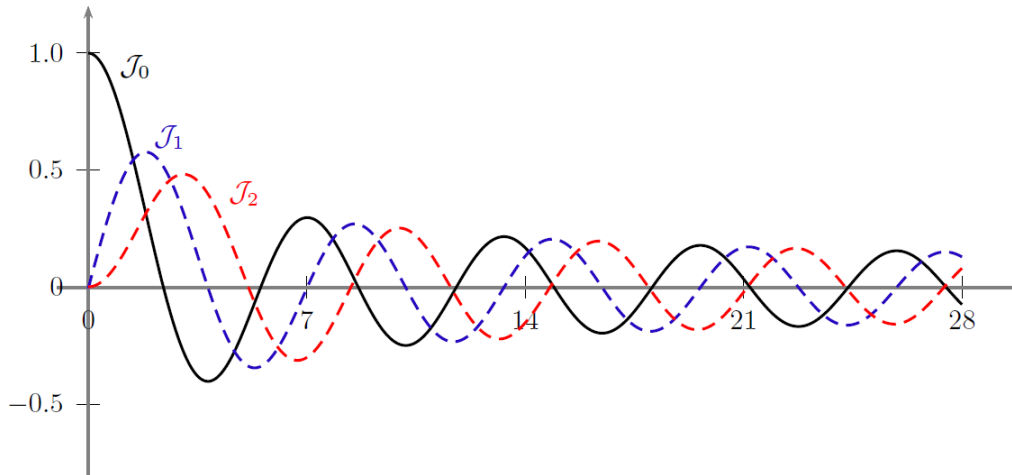
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}. \quad (4)$$

na Equação (1) e efetuar as devidas manipulações, obtemos:

$$(s^2 - \nu^2) a_0 x^s + [(s+1)^2 - \nu^2] a_1 x^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+s)^2 - \nu^2] a_n + a_{n-2}\} x^{n+s} = 0.$$



Figura 1 – Funções de Bessel  $\mathcal{J}_0$ ,  $\mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_2$



Fonte: (NASCIMENTO; SANTOS, 2020)

Como  $a_0 \neq 0$  e utilizando a identidade de polinômios, podemos escrever:

$$s^2 - \nu^2 = 0 \quad (5)$$

$$\{(s+1)^2 - \nu^2\}a_1 = 0 \quad (6)$$

$$\{(n+s)^2 - \nu^2\}a_n + a_{n-2} = 0, n \geq 2. \quad (7)$$

A Equação (5) só envolve o parâmetro  $\nu$  e é, por isso, chamada indicial ou auxiliar, e a Equação (7) é uma relação de recorrência.

Da Equação (5), segue que:

$$s = \pm \nu. \quad (8)$$

Substituindo os valores de  $s$  na Equação (6) e na Equação (7), temos:

$$0 = (1 \pm 2\nu)a_1 \quad (9)$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm 2\nu)}, n \geq 2. \quad (10)$$

Note que o denominador da Equação (10) pode se anular nos casos em que  $\nu$  é um número inteiro ou semi-inteiro (número real cuja parte fracionária é igual a meio).

Da igualdade em (9), temos duas possibilidades:

$$\nu \neq \mp \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 0; \quad (11)$$

$$\nu = \mp \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 \text{ é arbitrário.} \quad (12)$$

Assim, obtemos dois casos para a igualdade na Equação (12).

**Caso 1.** Quando  $\nu = -\frac{1}{2}$ , da Equação (10), temos:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}, n \geq 2. \quad (13)$$

Façamos  $n = 2k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . Então,  $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k-1)}, k \geq 1$ .

Dessa forma, para:

$$k = 1 \Rightarrow a_2 = (-1) \frac{a_0}{2 \cdot 1}$$

$$k = 2 \Rightarrow a_4 = (-1)^2 \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$k = 3 \Rightarrow a_6 = (-1)^3 \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$\vdots$

$$k = k \Rightarrow a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(2k)!}. \quad (14)$$

Agora, se  $n = 2k + 1$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , então  $a_{2k+1} = -\frac{a_{2k-1}}{(2k+1)2k}, k \geq 1$ .

Dessa forma, para:

$$k = 1 \Rightarrow a_3 = (-1) \frac{a_1}{3 \cdot 2}$$

$$k = 2 \Rightarrow a_5 = (-1)^2 \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$k = 3 \Rightarrow a_7 = (-1)^3 \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$\vdots$

$$k = k \Rightarrow a_{2k+1} = (-1)^k \frac{a_1}{(2k+1)!}. \quad (15)$$

Observe que a Equação (2) pode ser escrita da seguinte



forma:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \right].$$

Substituindo os coeficientes encontrados na Equação (14) e na Equação (15) e usando as expansões em séries de potências das funções seno e cosseno, obtemos:

$$y = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \cos(x) + \frac{a_1}{\sqrt{x}} \sin(x). \quad (16)$$

Definamos  $y_1 = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$  e  $y_2 = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ . O wronskiano das funções  $y_1$  e  $y_2$ , é:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}$$

é diferente de zero, para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dessa forma, a Equação (16) se constitui em uma solução geral para Equação (1).

**Caso 2:** Quando  $\nu = \frac{1}{2}$ , da Equação (10), temos:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \quad n \geq 2. \quad (17)$$

Os cálculos para determinar os coeficientes da série (solução proposta para esse caso) são análogos aos feitos no caso anterior.

A solução da Equação (1) é dada por

$$y = \frac{a_0}{x\sqrt{x}} \sin(x) + \frac{2a_1}{x\sqrt{x}} [1 - \cos(x)]. \quad (18)$$

Se  $y_1 = \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$  e  $y_2 = \frac{1 - \cos(x)}{x\sqrt{x}}$ , o wronskiano dessas funções é:

$$W_2(x) = \frac{1}{x^3} (1 - \cos(x))$$

e apresenta zeros em  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Dessa forma, a Equação (18) não se constitui em uma solução geral para a Equação de Bessel (1).

Retornemos à diferença em (11), em que  $a_1 = 0$  e, pela relação de recorrência na Equação (10), constatamos que  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ .

Para obtermos os coeficientes com índices pares, façamos  $n = 2w$ , com  $w \in \mathbb{N}$ . Logo, para  $0 < \nu \neq 1/2$  ( $s > 0$ ), temos:

$$a_{2w} = -\frac{a_{2w-2}}{2^2 w(w+\nu)}, \quad w \geq 1. \quad (19)$$

Para  $w = 1$  e  $w = 2$ , temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu} 1! \Gamma(\nu+2)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2^2 2(\nu+2)} = -\frac{1}{2^{4+\nu} 2! \Gamma(\nu+3)} \\ &\vdots \\ a_{2w} &= \frac{(-1)^w}{2^{2w+\nu} w! \Gamma(\nu+w+1)}, \end{aligned} \quad (20)$$

em que  $\Gamma$  é a função gama, definida em (BOYCE; DIPRIMA, 1995, p. 421), e  $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$  (valor comumente atribuído).

Ao substituir os coeficientes na Equação (2), obtemos a função de Bessel de primeira espécie de índice  $\nu$ :

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)}, \quad 0 < \nu \neq \frac{1}{2}. \quad (21)$$

A solução definida pela Equação (21) para a Equação (1) é chamada de **função de Bessel de primeira espécie**.

Pelo teste da razão, esta série converge para todos os valores de  $x$ . Se  $\nu \in \mathbb{Z}$ , então  $\mathcal{J}_\nu(x)$  é unívoca e a série na Equação (21) é de Maclaurin. Se  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , então  $\mathcal{J}_\nu(x)$  possuirá um ponto de ramificação na origem, cujos ramos são determinados pelos ramos de  $x^\nu$  e sua quantidade pode ser finita ou infinita, respectivamente, para valores de  $\nu$  racionais ou irracionais. Se fizermos  $\nu$  variar continuamente, mantendo um valor de  $x$  fixo não nulo, então  $\mathcal{J}_\nu(x)$  será uma função contínua (uma série uniformemente convergente de funções contínuas) (NASCIMENTO; SANTOS, 2020 apud BUTKOV, 1973, p. 7).

A Figura 1 ilustra o comportamento das funções de Bessel de primeira espécie quando  $\nu = 0, 1, 2$ .

Sendo  $-\nu$  a segunda raiz da Equação (8), substituindo  $\nu$  por  $-\nu$  na Equação (21), vamos obter uma outra função de Bessel de primeira espécie:

$$\mathcal{J}_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-\nu}}{2^{2n-\nu} n! \Gamma(n-\nu+1)}, \quad 0 < \nu \neq \frac{1}{2}. \quad (22)$$

As funções  $\mathcal{J}_\nu$  e  $\mathcal{J}_{-\nu}$  constituem um sistema de soluções para a Equação (1) desde que a linearidade das soluções  $\mathcal{J}_\nu$  e  $\mathcal{J}_{-\nu}$  seja verificada. De fato, pelo wronskiano, temos:

$$W(\mathcal{J}_\nu, \mathcal{J}_{-\nu}) = -2 \frac{\sin(\nu\pi)}{x\pi}. \quad (23)$$

Se  $\nu$  não é inteiro, então  $W(\mathcal{J}_\nu, \mathcal{J}_{-\nu}) \neq 0$  e  $\mathcal{J}_\nu$  e  $\mathcal{J}_{-\nu}$  são soluções L.I. da Equação (21). Caso contrário,

$$\mathcal{J}_{-\nu}(x) = (-1)^\nu \mathcal{J}_\nu(x) \quad (24)$$



e, dessa forma, devemos encontrar uma outra função que constitua uma par de soluções LI para a Equação (1).

Utilizando o método D'Alembert, encontramos a **função de Bessel de segunda espécie**, dada por

$$y_2(x) = \mathcal{J}_\nu(x) \int \frac{dx}{x[\mathcal{J}_\nu(x)]^2}. \quad (25)$$

e a denotaremos por  $\mathcal{Y}_\nu$  (NASCIMENTO; SANTOS, 2020, p. 8).

Assim, a solução geral para a Equação (1) é:

$$y(x) = a_0 \mathcal{J}_\nu(x) + a_1 \mathcal{Y}_\nu(x), \nu \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}. \quad (26)$$

(IDRIS; BUHARI; ADAMU, 2016, p. 18 ).

Em resumo, o método produz pelo menos uma solução para a Equação (1). Existem casos em que o método produz duas soluções linearmente independentes e nos casos em que se obtém apenas uma solução, temos que a outra poderá ser obtida através do método de d'Alembert, visto que a relação de recorrência pode não ser válida ou que o par de soluções obtidas formam um conjunto linearmente dependente.

O estudo sobre as funções de Bessel pode ser aprofundado em (WATSON, 1995).

### Esforços mecânicos sobre uma viga

Os materiais de construção estão frequentemente sujeitos a solicitações de cargas de diversos tipos, como por exemplo, cargas concentradas, cargas distribuídas, o próprio peso, ação do vento, entre outros. Estas solicitações de cargas são chamadas de esforços, o principal foco de estudos na resistência dos materiais. A depender de como estes esforços são solicitados num corpo, uma denominação específica é atribuída. Os esforços de flexão, torção e flambagem serão abordados nesta seção, uma vez que são conceitos fundamentais para a compreensão da flambagem lateral com torção.

### Tensão e deformação

A resistência dos materiais é um campo da mecânica que examina as relações entre a intensidade das forças internas que agem no interior de um corpo com as cargas externas aplicadas a um corpo deformável. Este ramo também estuda o cálculo das deformações do corpo e possibilita o estudo de sua estabilidade ao sofrer à ação de forças externas (HIBBELER, 2010, p. 1).

Segundo Hibbeler (2010, p. 47), as deformações ocorrem quando uma força é aplicada a um corpo, modificando a sua forma e tamanho. As mudanças que ocorrem

no corpo deformado necessitam de equipamentos precisos para serem aferidas, pois, estas alterações podem ser praticamente invisíveis ou altamente visíveis. A deformação normal é definida como o alongamento ou contração de um segmento de reta por unidade de comprimento. Para exemplificar, iremos considerando uma reta  $AB$  orientada ao longo de um eixo arbitrário  $n$ , contida no interior de um corpo não deformado e com comprimento inicial  $\Delta s$  (ver Figura 2). Os efeitos da deformação no corpo provocam um deslocamento dos pontos  $A$  e  $B$  para  $A'$  e  $B'$ , deformando a reta numa curva de comprimento  $\Delta s'$ . Logo, a mudança no comprimento da reta é  $\Delta s' - \Delta s$  e, desta forma, podemos definir a deformação normal média  $\epsilon$  como:

$$\epsilon_{med} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}. \quad (27)$$

Ao passo que aproximamos o ponto  $B$  ao ponto  $A$ , o comprimento de reta vai sendo reduzido, de maneira que  $\Delta s \rightarrow 0$ . Da mesma maneira, é possível notar que  $\Delta s' \rightarrow 0$  quando o ponto  $B'$  se aproxima do ponto  $A'$ . Desta forma, podemos escrever que, no limite, a deformação normal no ponto  $A$  e na direção do eixo  $n$  é:

$$\epsilon = \lim_{\substack{B \rightarrow A \\ (\text{ao longo de } n)}} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}. \quad (28)$$

Outro conceito importante utilizado para estudar as deformações num corpo são as **tensões**. A tensão normal  $\sigma$  ocorre quando uma força  $P$  é aplicada perpendicularmente à seção transversal de área medindo  $A$  de um corpo. Considerando que a tensão sobre a seção transversal é constante com a ação de  $P$ , podemos escrever:

$$\sigma = \frac{P}{A}. \quad (29)$$

A tensão normal  $\sigma$  e a deformação normal  $\epsilon$  são conceitos fundamentais para a realização dos ensaios de tração e compressão. Segundo Hibbeler (2010, p. 57), estes ensaios têm grande importância para determinar a resistência dos materiais, ou seja, a sua capacidade de suportar uma carga sem a ocorrência de deformação excessiva ou ruptura.

Num ensaio de tração, a deformação normal média é obtida com o auxílio de um dispositivo mecânico ou óptico denominado extensômetro. Este dispositivo mede o alongamento  $\delta = L - L_0$ .

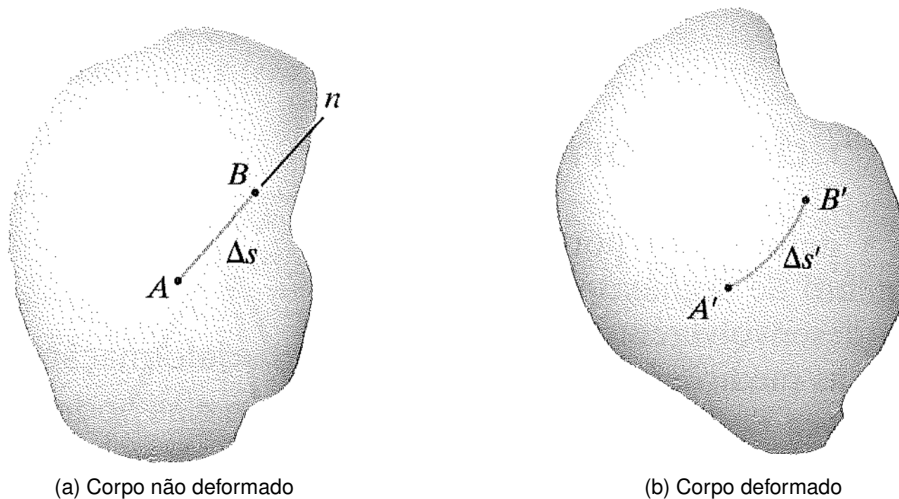
Ao dividirmos o alongamento do corpo de prova pelo seu comprimento inicial  $L_0$ , encontramos a deformação nominal ou deformação de engenharia  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}. \quad (30)$$





Figura 2 – Deformação normal num corpo



Fonte: (HIBBELER, 2010, p. 48)

O ensaio de tração ou compressão consiste na aplicação de uma carga axial, tracionando ou contraindo o corpo de prova, promovendo uma deformação. O resultado gráfico do ensaio é o diagrama tensão-deformação, uma curva em que a ordenada é a tensão e a abcissa é a deformação (ver Figura 3).

Na região (zona) elástica, não existe deformação permanente no corpo tracionado, ou seja, uma vez que a carga de tração é retirada, o elemento retorna a sua forma inicial. Esta zona ocorre até um determinado valor de tensão, conhecido como limite de elasticidade. Quando a tensão ultrapassa o limite de elasticidade, entramos na zona de escoamento, onde é iniciada a deformação plástica do material e marca a transição para a próxima região. Na última zona, temos o comportamento plástico do material, onde a deformação é permanente e só é encerrada com o rompimento do corpo de prova.

Para os diferentes tipos de materiais, temos gráficos distintos e a curva apresentada no diagrama tensão-deformação (ver Figura 3) é condizente com as propriedades mecânicas do material ensaiado.

Em muitos casos de projetos de engenharia, os elementos estruturais são dimensionados para sofrerem pequenas deformações e estas envolvem somente a região elástica correspondente ao diagrama tensão-deformação. Nessas condições, a tensão  $\sigma$  sofrida por um corpo é diretamente proporcional à sua deformação de engenharia  $\epsilon$ . Logo, escrevemos:

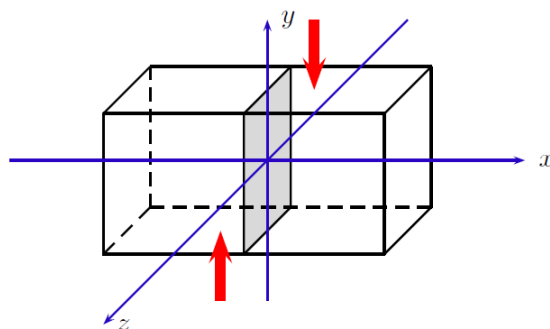
$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad (31)$$

em que a constante  $E$  de proporcionalidade é chamada **módulo de elasticidade** ou **módulo de Young**, em homenagem ao cientista inglês Thomas Young (1773-1829),

e é uma propriedade mecânica que mensura a rigidez de um material sólido. A relação dada pela Equação (31) é conhecida como lei de Hooke, em homenagem à Robert Hooke (1635-1703), matemático inglês (BEER et al., 2011, p. 76).

Analogamente ao caso das tensões normais, podemos encontrar algumas relações quando a força aplicada ao corpo é tangencial à seção transversal. A força cortante  $V$  corresponde ao somatório de todas as forças contidas no plano  $YZ$ , perpendiculares ao eixo longitudinal de um corpo (ver Figura 4). O esforço produzido tende a deslizar as seções transversais entre si, provocando as tensões de cisalhamento  $\tau$ .

Figura 4 – Força cortante



Fonte: Elaborada pelos autores

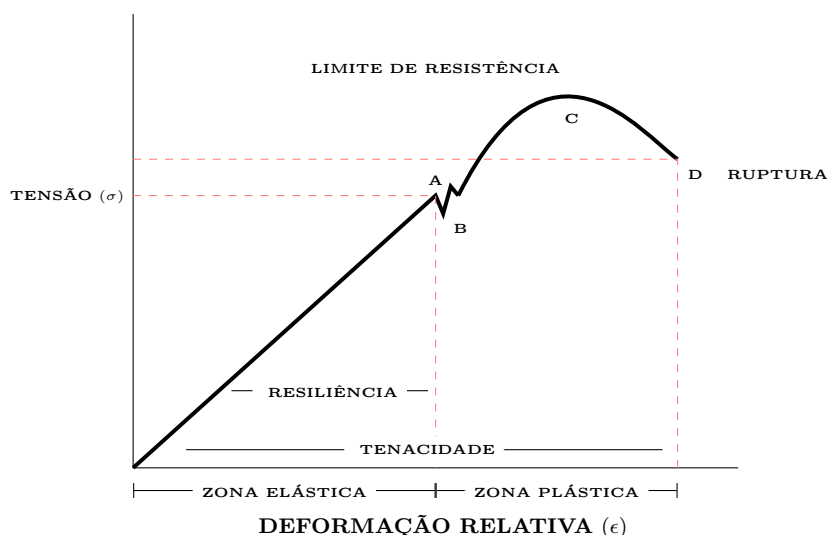
O Valor médio da tensão de cisalhamento é obtida ao dividirmos a força cortante total  $V$  pela área da seção transversal onde esta força atua.

$$\tau_{\text{med}} = \frac{V}{A}. \quad (32)$$

Com finalidade de visualizar as deformações



Figura 3 – Diagrama da Tensão × Deformação Relativa



Fonte: Autores

provocadas pelas tensões de cisalhamento num corpo, iremos considerar um cubo elementar sujeito à tensão de cisalhamento  $\tau$ , distribuída sobre sua face superior (ver Figura 5). Uma vez que as tensões normais atuantes sobre o elemento são nulas, o equilíbrio na direção horizontal só é possível se, na face inferior do cubo, existir uma tensão de cisalhamento de mesma intensidade e sentido oposto à tensão presente na face superior do cubo. Além disso, para que o corpo se mantenha em equilíbrio estático, devem existir duas tensões de cisalhamento iguais a  $\tau$  distribuídas nas faces verticais, equilibrando o momento produzido pelas tensões de cisalhamento atuantes nas faces inferior e superior. De modo geral, as tensões de cisalhamento que atuam num corpo em equilíbrio, agem aos pares, com mesma intensidade e sentidos opostos, ocorrendo em planos perpendiculares entre si. Um corpo sujeito apenas às tensões de cisalhamento, é dito em cisalhamento puro.

Agora, para exemplificar as deformações provocadas por tensões de cisalhamento presentes num corpo, iremos considerar o cubo elementar (ver Figura 5a) de face  $abcd$ . Uma vez que as tensões normais atuantes sobre o cubo são nulas, não existe variação do comprimento das arestas  $ab$ ,  $cd$ ,  $ac$  e  $bd$ . Contudo, as tensões de cisalhamento  $\tau$ , irão proporcionar uma distorção no quadrado  $abcd$ , o transformando num paralelogramo. Com a deformação, o ângulo no vértice  $c$ , que anteriormente media  $\pi/2$  passa a ser  $\pi/2 - \gamma$ , enquanto o ângulo no vértice  $a$  passa a ser  $\pi/2 + \gamma$ . Este ângulo  $\gamma$  é provocado pelo cisalhamento e mede a distorção do elemento, e é denominado deformação de cisalhamento (ver Figura 5b) (TIMOSHENKO; GERE, 1983, p. 21, 22).

Segundo Hibbeler (2010, p.74), nas situações as quais a tensão de cisalhamento não excede o limite de

proporcionalidade, também podemos aplicar a lei de Hooke. A proporcionalidade entre a respectiva deformação e a tensão de cisalhamento pode ser escrita como:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (33)$$

em que o módulo de elasticidade transversal do material ou módulo de rigidez  $G$  é uma constante que representa a rigidez ao cisalhamento do material.

Raio de curvatura de uma curva plana

Definiremos, a seguir, uma medida que representa o quanto uma curva no plano está curvada ou torcida, ou seja, o quanto ela está distante de ser uma reta. A curvatura de uma curva em um dado ponto é uma função que mede a variação do vetor tangente com respeito ao comprimento de arco  $s$ . Claramente, queremos que a reta possua curvatura nula, pois ela não difere da sua tangente em ponto algum.

Para encontrar a equação da curvatura de uma curva, o seguinte resultado é necessário.

**Teorema 1.** *Uma função vetorial  $\mathbf{r}$  possui norma constante se, e somente se,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$ .*

**Demonstração:** Como  $\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ , temos:

$$\frac{d\|\mathbf{r}\|^2}{dt} = \frac{d}{dt}[\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}] = \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Se  $\|\mathbf{r}\|$  for constante, temos:

$$\frac{d\|\mathbf{r}\|^2}{dt} = 0,$$

isto é,

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0.$$

Reciprocamente, se  $\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ , então  $\|\mathbf{r}\|$  é constante.

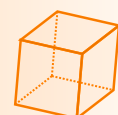
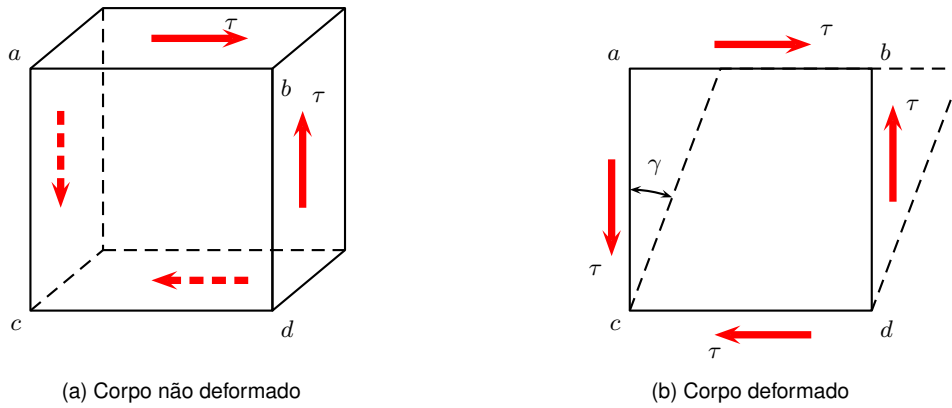


Figura 5 – Deformação cisalhante num corpo



Fonte: (TIMOSHENKO; GERE, 1983, p. 22)

■ Segue que

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = \|\mathbf{r}'\|^2 \|\mathbf{T} \times \mathbf{T}'\|.$$

Considere, agora, o vetor unitário  $\mathbf{T}$  tangente a uma curva no plano em um dado ponto, de equação paramétrica  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Assim,  $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$ .

Como  $\|\mathbf{T}\| = 1$  e os vetores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$  são ortogonais, temos:

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = \|\mathbf{r}'\|^2 \|\mathbf{T}\| \|\mathbf{T}'\| = \|\mathbf{r}'\|^2 \|\mathbf{T}'\|.$$

Pelo Teorema 1, temos que  $\mathbf{T}'$  é paralelo ao vetor normal  $\mathbf{N}$  unitário, ou seja,

Concluimos, que:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N},$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}.$$

em que  $\kappa(t)$  é a função curvatura (função escalar). Pela regra da cadeia, temos:

O raio de curvatura  $\rho(t_0)$  de uma curva plana, para um dado ponto  $\mathbf{r}(t_0)$  é o raio da circunferência tangente à curva neste ponto e cujo centro é o ponto  $\mathbf{r}(t_0) + \kappa(t_0)\mathbf{N}$  e é dado por:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{1}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{1}{s'(t)},$$

$$\rho(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}.$$

em que

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\omega)\| d\omega, a \leq t \leq b,$$

é a função comprimento de arco.

Flexão e deflexão

Como  $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ , obtemos:

Para esta subseção, o momento a ser tratado é o fletor. Segundo Beer et al. (2011, p. 232), na estática, o momento fletor  $M$  ocorre quando duas forças iguais e de sentidos opostos são aplicadas e, portanto, o somatório em qualquer direção destas forças é igual a zero. Além do mais, o momento fletor é o mesmo para qualquer eixo perpendicular a seu plano e nulo para qualquer eixo contido no seu plano. Discutiremos, também, as deformações provocadas por momentos fletores atuantes numa viga prismática de material homogêneo. Para Hibbeler (2010, p. 4), o momento fletor  $M$  é o resultado de cargas externas atuantes sobre um corpo que tendem a curva-lo em torno de um eixo localizado no plano da seção transversal.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \mathbf{N}.$$

Assim, por comparação, temos que

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Por outro lado,

$$\mathbf{r}' = \|\mathbf{r}'\| \mathbf{T} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$$

e

$$\mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt} \mathbf{T}\right)' = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \mathbf{T}'$$

Mas,

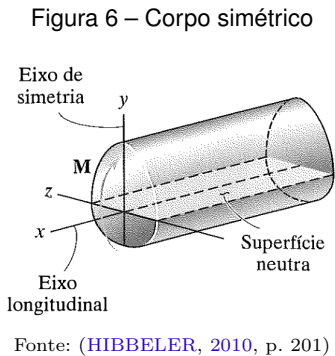
$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= \left(\frac{ds}{dt} \mathbf{T}\right) \times \left(\frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \mathbf{T}'\right) \\ &= \underbrace{\frac{ds}{dt} \mathbf{T} \times \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}}_{=0} + \frac{ds}{dt} \mathbf{T} \times \frac{ds}{dt} \mathbf{T}' \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}') = \|\mathbf{r}'\|^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}') \end{aligned}$$

As vigas aqui abordadas possuem seção transversal com eixo de simetria e há um momento fletor  $M$ , atuante sobre uma linha central, perpendicular a esse plano de simetria (ver Figura 6). Por serem também deformáveis, apresentam, sobre a presença do momento fletor



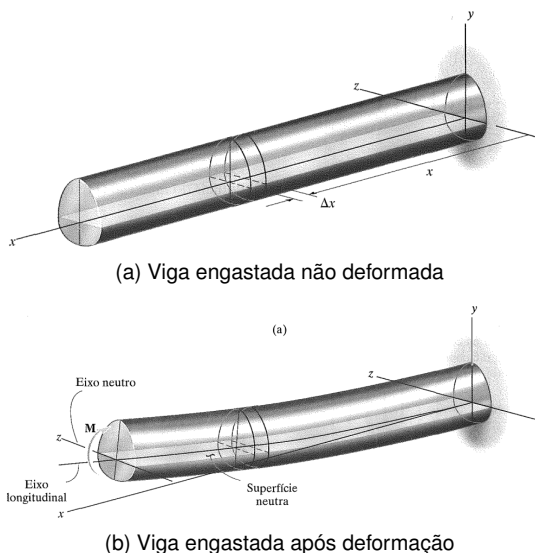


$M$  positivo (sentido horário), contração das fibras do material na região superior da barra e tração na parte inferior da barra. Entre estas duas regiões existe uma superfície denominada superfície neutra, que não sofre variação no comprimento das fibras longitudinais do material (HIBBELER, 2010, p. 201).



Para entendermos como a tensão deforma minimamente a viga, faremos algumas considerações. O eixo longitudinal está sobre o eixo  $x$ , localizado no centro da superfície neutra, antes da ação do momento fletor  $M$ . Quando a viga sofre a ação de  $M$ , o eixo longitudinal não sofre alteração no seu comprimento, contudo, com a deformação na viga, provocada por  $M$ , o eixo longitudinal (segmento de reta) será transformado numa curva, que está localizada no plano de simetria  $x - y$  (ver Figura 7b). Também, devemos considerar que durante a deformação, todas as seções transversais da viga irão permanecer planas e perpendiculares ao eixo longitudinal. Por último, desprezaremos as deformações da seção transversal dentro de seu próprio plano (HIBBELER, 2010, p. 202).

Figura 7 – Viga engastada



Para encontrarmos a deformação de uma viga submetida à flexão, iremos isolar uma seção da viga com espessura  $\Delta x$  antes da deformação, localizada à distância  $x$  ao longo do comprimento da viga (ver Figura 7a).

Podemos observar, na vista lateral da viga, que qualquer segmento de reta de comprimento  $\Delta x$ , situado na superfície neutra, não sofre variação de comprimento, porém, qualquer segmento de reta de comprimento  $\Delta s$ , posicionado arbitrariamente à distância  $y$  da superfície neutra, irá se contrair para um comprimento  $\Delta s'$  após a deformação (ver Figura 8).

Podemos expressar a deformação normal Equação (28) em termos do raio de curvatura  $\rho$  do eixo longitudinal do elemento e da localização  $y$  do segmento. Para isto, iremos considerar que antes da deformação  $\Delta x = \Delta s$  e após a deformação  $\Delta x$  possui raio de curvatura centrado em  $O'$ . Uma vez que o ângulo entre os lados da seção transversal do elemento é definido por  $\Delta\theta$ , temos que  $\Delta x = \Delta s = \rho\Delta\theta$  (HIBBELER, 2010, p. 202). Desta forma, o comprimento deformado  $\Delta s$  vem a ser  $\Delta s' = (\rho - y)\Delta\theta$ . Logo, podemos expressar a deformação normal como:

$$\epsilon = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (34)$$

A deformação máxima ocorre a uma distância  $c$  da superfície neutra. Desta forma:

$$\epsilon_{\max} = \frac{c}{\rho} \quad (35)$$

Podemos encontrar a deformação normal em função da deformação normal máxima ao dividirmos  $\epsilon$  por  $\epsilon_{\max}$ . Assim, temos que:

$$\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right) \epsilon_{\max} \quad (36)$$

Partindo da premissa que o material se comporta de forma elástica, é possível aplicar a lei de Hooke (Equação (31)). Da Equação (31) e da Equação (36), encontramos a equação que representa a distribuição de tensão na seção transversal.

$$\sigma = -\frac{y}{c} \cdot \sigma_{\max} \quad (37)$$

É possível notar que da deformação normal  $\epsilon$  e a tensão normal  $\sigma$  variam de zero, no eixo neutro, para o seus máximos valores, à uma distância  $c$  deste eixo.

Para encontrarmos a posição do eixo neutro na seção transversal, assumiremos que a força resultante

provocada pela distribuição de tensão na seção transversal será nula. No elemento arbitrário  $dA$  é possível observar a ação de uma força  $dF = \sigma dA$ . Assim,

$$\begin{aligned} F_R &= \sum F_x \\ \Rightarrow 0 &= \int_A dF = \int_A \sigma dA = \int_A -\left(\frac{y}{c}\right) \sigma_{\max} dA \\ &= -\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y dA. \end{aligned} \quad (38)$$

Como  $\sigma_{\max}$  é diferente de zero, concluímos que:

$$\int_A y dA = 0. \quad (39)$$

A Equação (39) determina que o primeiro momento da seção transversal em relação ao eixo neutro  $z$  é nulo. Essa condição ocorre somente quando o eixo neutro passa pelo centroide da seção transversal.

Seja  $dA$  uma área infinitesimal da seção transversal com distância  $y$  do eixo neutro. A força infinitesimal que atua sobre esta área é  $\sigma dA$  e provoca um momento elementar  $\sigma y dA$  em relação ao eixo neutro.

Temos que o momento fletor  $M$  é o resultado da soma das integrais de todos os momentos elementares sobre a área da seção transversal. Portanto, temos que (TIMOSHENKO; GERE, 1983, p. 94, 95):

$$\begin{aligned} M &= \int \sigma y dA \\ &= \int y \left(\frac{y}{c} \sigma_{\max}\right) dA \\ &= \frac{\sigma_{\max}}{c} \int y^2 dA. \end{aligned} \quad (40)$$

A integral  $\int y^2 dA$  representa o momento de inércia da seção transversal  $I$  (expressa a dificuldade em mudar o estado de movimento de um corpo em rotação). Assim, podemos escrever a tensão normal máxima como:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot c}{I}. \quad (41)$$

Utilizando a Equação (37), podemos encontrar a Equação (42), que expressa a tensão normal em uma distância intermediária  $y$ :

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}. \quad (42)$$

A deformação da viga causada pelo momento  $M$  fletor é mensurada pela curvatura da superfície neutra. Considerando o regime elástico, podemos aplicar a

lei de Hooke (Equação (31)) na Equação (36) e, combinando com Equação (40), encontramos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_{\max}}{E \cdot c} = \frac{1}{E \cdot c} \frac{M \cdot c}{I} = \frac{M}{E \cdot I}. \quad (43)$$

Quando a equação da curva plana é dada por  $y = f(x)$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x) &= x \mathbf{i} + f(x) \mathbf{j} \\ \mathbf{r}'(x) &= \mathbf{i} + f'(x) \mathbf{j} \\ \mathbf{r}''(x) &= f''(x) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Lembrando que  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  e  $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$ , verificamos que  $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x) \mathbf{k}$ .

Temos, também, que  $\|\mathbf{r}'(x)\| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ . Como a curvatura  $\kappa$  de uma curva é o inverso do raio de curvatura, temos:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (44)$$

Como a inclinação da linha elástica de uma viga é muito pequena, o seu quadrado  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  é desprezível e, dessa forma, podemos simplificar a expressão Equação (44)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (45)$$

Substituindo a Equação (43) na Equação (45), encontramos a equação da linha elástica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}. \quad (46)$$

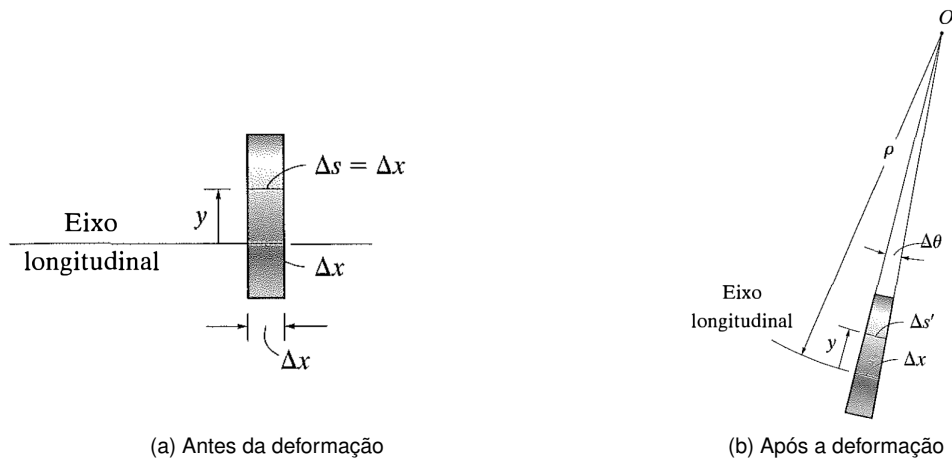
ou seja, a equação da curva no qual o eixo da viga é modificado sob um determinado carregamento (BEER et al., 2011, p. 553).

A Equação (46) (diferencial linear de segunda ordem) determina a inclinação e deflexão transversal da viga em qualquer ponto, ou seja, com ela podemos descrever a viga deformada e a forma que a linha elástica é governada (BEER et al., 2011, p. 553).

## Torção

O momento que tende a torcer um elemento em torno do seu eixo longitudinal é chamado de torque  $T$ , e seu efeito é uma preocupação essencial em projetos de eixos ou eixos de acionamento em diversas aplicações. Para exemplificar as consequências físicas do torque, iremos considerar uma barra de material com alto grau de deformação, como por exemplo, a borracha (ver Figura 9a). Com a ação de  $T$  na barra, os círculos e as retas longitudinais da grade, tendem a se distorcer. A torção, os círculos matem a sua forma e as linhas longitudinais

Figura 8 – Elementos antes e após a deformação

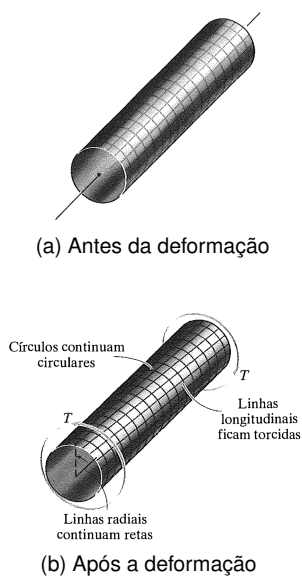


Fonte: (HIBBELER, 2010, p. 203)

da grade são deformadas em forma de hélices, interceptando os círculos em ângulos iguais. Além do mais, as linhas radiais na extremidade da barra continuam retas durante a deformação e as seções transversais na extremidade se mantêm planas (ver Figura 9b). Dessa forma, consideraremos que, se o ângulo de rotação for pequeno, o comprimento e o raio do eixo não sofrerão alteração.

Considerando agora, um eixo engastado, sobre à aplicação de torque  $T$  em sua extremidade livre. O torque provocará uma rotação na barra, com sua extremidade livre girando num ângulo  $\phi$ , chamado ângulo de torção (ver Figura 10). Este ângulo é proporcional à intensidade do torque  $T$  e ao comprimento  $L$  do eixo. O ângulo de torção é fundamental para determinar a distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal da barra.

Figura 9 – Deformação por torção em eixo circular

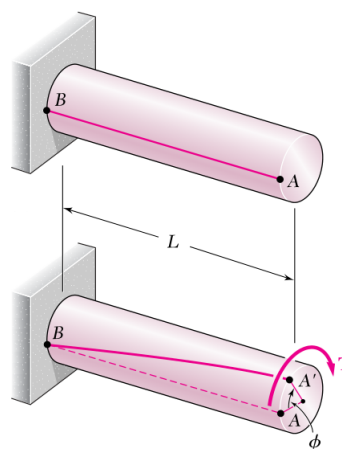


Fonte: (HIBBELER, 2010, p. 125)

Para compreender como a distorção deforma a barra, isolaremos um pequeno segmento da barra localizado à uma distância  $\rho$  da linha central do eixo. Graças à deformação, a face posterior sofrerá uma deformação de  $\phi(x)$ , enquanto na face anterior a deformação será  $\phi(x) + \Delta\phi$ , resultando numa deformação por cisalhamento  $\gamma$  proporcionada pela razão da diferença entre as rotações (Ver Figura 11). Antes da deformação, o ângulo entre as bordas  $AB$  e  $AC$  é  $90^\circ$ , e logo após a deformação, as bordas do elemento passam a ser  $AD$  e  $AC$  com ângulo  $\theta'$  entre elas. Podemos relacionar a deformação por cisalhamento  $\gamma$  com o comprimento da viga  $\Delta x$  e com a diferença no ângulo de rotação  $\Delta\phi$ . Se  $\Delta x \rightarrow dx$  e  $\Delta\phi \rightarrow d\phi$ , temos que  $BD = \rho d\phi = \gamma dx$ . Logo:

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \quad (47)$$

Figura 10 – Deformação em uma barra circular



Fonte: (BEER et al., 2011, p. 156)

Uma vez que  $d\phi$  e  $dx$  são os mesmos para todos os elementos posicionados em pontos da seção transver-

sal  $x$ , então  $d\phi/dx$  é constante nessa seção transversal, desta maneira, a Equação (47) indica que, dentro do eixo, a deformação por cisalhamento  $\gamma$  varia de forma linear ao longo de qualquer eixo radial, partindo de zero na linha central do eixo até atingir o seu valor máximo  $\gamma_{\max}$  a uma distância  $c$  no contorno externo do eixo. Assim, podemos escrever:

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}. \quad (48)$$

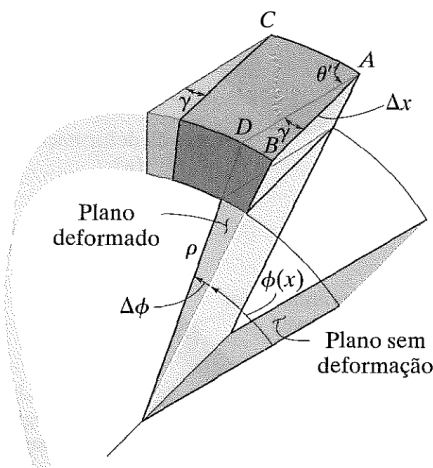
Um eixo sobre a ação de um torque externo, produz um torque interno correspondente, e para desenvolvermos uma equação que relaciona esse torque interno com a distribuição de tensão de cisalhamento na seção transversal de um eixo ou tubo circular, partiremos da premissa que esta tensão não ultrapassara o limite elástico do material, para que desta forma possamos aplicar a lei de Hooke para o cisalhamento Equação (33). Assim, podemos chegar à relação

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{\max}, \quad (49)$$

que expressa a distribuição de tensão cisalhante conforme a posição radial  $\rho$  do elemento. Para que o eixo esteja em equilíbrio, o torque interno resultante  $T$  na seção deve equivalente ao torque produzido pela distribuição de tensão por toda seção transversal. Em específico, todo elemento infinitesimal de área  $dA$ , posicionado a uma distância  $\rho$ , está sujeito à ação de uma força  $dF = \tau dA$ , e o torque produzido por esta força é  $dT = \rho(\tau dA)$ . Desta forma, temos que para toda a seção transversal

$$\begin{aligned} T &= \int_A \rho(\tau dA) \\ &= \int_A \rho \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{\max} dA \\ &= \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA. \end{aligned} \quad (50)$$

Figura 11 – Deformação por cisalhamento



Fonte: (HIBBELER, 2010, p. 139)

A parcela  $\int_A \rho^2 dA$  representa o momento polar de inércia  $J$ , que caracteriza a resistência de um eixo ou viga a ser distorcido por torção. Observemos que esta integral depende somente da geometria do eixo e assim, podemos escrever:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot c}{J}. \quad (51)$$

Substituindo a Equação (49) na Equação (50), encontramos:

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}. \quad (52)$$

A Equação (50) e a Equação (52) são conhecidas como fórmulas da torção (HIBBELER, 2010, p. 125 - 127).

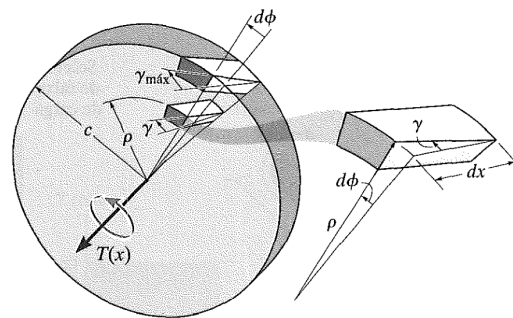
Em alguns casos, a restrição à quantidade de rotação ou torção que pode ocorrer a um eixo sob a ação de um torque deve ser estudado na etapa de projeto. Um disco submetido a um torque  $T(x)$  sofrerá uma deformação, de tal maneira que a rotação relativa de uma de suas faces em relação à outra será  $d\phi$ , resultando numa deformação por cisalhamento  $\gamma$  no elemento de material localizado no interior do disco a uma distância arbitrária  $\rho$  (Ver Figura 12). Temos que os valores de  $d\phi$  e  $\gamma$  podem ser relacionados com Equação (47), considerando a lei de Hooke para o cisalhamento Equação (33), podemos expressar a tensão de cisalhamento em termos do torque aplicado pela fórmula de torção Equação (52). Dessa forma,

$$\gamma = \frac{T(x) \cdot \rho}{J(x) \cdot G}.$$

Assim, escrevemos que o ângulo de torção para o disco é:

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x) \cdot G} dx. \quad (53)$$

Figura 12 – Disco sob ação de torque



Fonte: (HIBBELER, 2010, p. 139)

Para encontrarmos o ângulo de torção para o eixo interior, iremos integrar a equação Equação (53) em



todo o comprimento  $L$  do eixo:

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x) \cdot G} dx. \quad (54)$$

Geralmente, nos problemas de engenharia, os materiais são homogêneos de tal modo que o módulo de elasticidade ao cisalhamento do material  $G$  é constante. Além do mais, o torque aplicado e a área da seção transversal do eixo são constantes ao longo do comprimento do eixo. Nestas circunstâncias, temos que  $T(x) = T$  e  $J(x) = J$ . Desta maneira, podemos simplificar o ângulo de torção para (HIBBELEER, 2010, p.140):

$$\phi = \frac{T \cdot L}{J \cdot G}. \quad (55)$$

### Flambagem lateral

A flambagem lateral com torção (FLT), é um estado limite onde as deformações da viga são produzidas pela combinação de deslocamentos laterais e rotações (GOMES, 1993, p. 98)

Quando uma viga metálica esbelta é sujeita a carregamentos que geram flexão em torno do eixo de maior rigidez flexural com restrições laterais insuficientes, ocorrem deslocamentos laterais ortogonais a este eixo, acompanhada da torção da seção transversal. Essas deformações definem a flambagem lateral com torção (ROSSI, 2018 apud YOSHIDA; MAEGAWA, 1984, p.43).

### APLICAÇÃO

Consideremos uma viga em balanço  $AB$ , de comprimento  $L$  e seção transversal retangular, engastada em  $B$ . Suponha que queiramos descobrir qual a intensidade de carga concentrada  $P$  máxima que devemos aplicar, para baixo, em sua extremidade livre  $A$ , provocando um momento fletor na viga que, por sua vez, provoca uma flambagem lateral com torção, fenômeno no qual é promovida uma perda de equilíbrio no plano principal de flexão da viga, onde o elemento fletido passa a sofrer um deslocamento lateral e rotação de torção.

A origem do sistema de coordenadas se situa na extremidade livre da viga (em  $A$ ). Os eixos  $x$ ,  $z$  e  $y$  são, respectivamente, orientados para a esquerda, para baixo e saindo do plano  $xOz$  (ver Figura 13a).

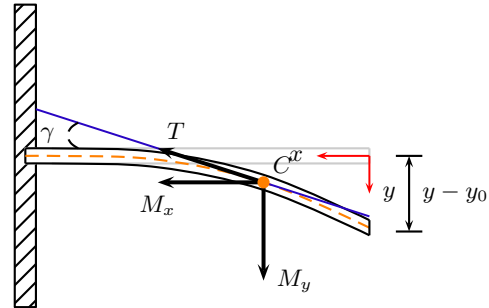
Com o deslocamento lateral da viga, provocada pela força  $P$ , o momento fletor  $M_y$  (responsável pela deflexão na viga) e o momento  $M_x$  (responsável pela torção na viga), ao longo de um ponto arbitrário  $C$ , da viga, são

dados por (ver Figura 14):

$$M_x = P \cdot (y - y_0) \quad (56)$$

$$M_y = -P \cdot x. \quad (57)$$

Figura 14 – Vista superior em planta da viga



Fonte: Elaborada pelos autores

À medida que afastamos o ponto  $C$  da origem, o ângulo de deflexão  $\theta$  tende a zero:

$$\lim_{x \rightarrow L} \theta = 0.$$

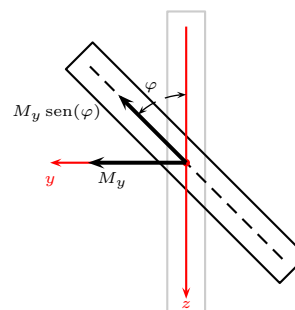
Sendo assim, podemos considerar que:

$$\frac{dy}{dx} = -\theta.$$

O momento de torção  $T$  da viga corresponde à soma das projeções dos momentos  $M_x$  e  $M_y$  sobre a tangente em planta (Reta tangente ao ponto  $C$  observada sobre a vista superior). O ângulo formado com a projeção da tangente em planta e o eixo  $x$  denotaremos por  $\gamma$  (ver Figura 14). Dessa forma, podemos escrever:

$$T = M_x \cdot \cos(\gamma) + M_y \cdot \sin(\gamma). \quad (58)$$

Figura 15 – Vista lateral da viga



Fonte: Elaborada pelos autores

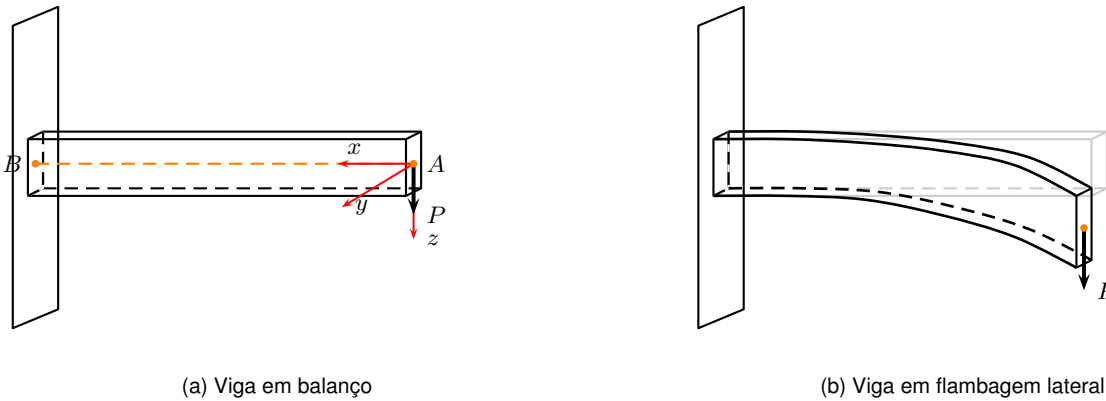
Substituindo a Equação (57) e a Equação (56) na Equação (58), encontramos o momento torsor:

$$T = P(y - y_0) \cdot \cos(\gamma) - P \cdot x \cdot \sin(\gamma). \quad (59)$$





Figura 13 – Elementos antes e após a deformação



(a) Viga em balanço

(b) Viga em flambagem lateral

Fonte: Elaborada pelos autores

Para pequenos ângulos (ver Figura 14), podemos fazer para  $\gamma$  as aproximações:

$$\cos(\gamma) = \frac{dx}{ds} \approx 1 \quad (60)$$

$$\sin(\gamma) = \frac{dy}{ds} \approx T \cdot g \cdot \gamma = \frac{dy}{dx}. \quad (61)$$

Segue que:

$$T \approx P \cdot (y - y_0) - P \cdot x \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (62)$$

Podemos relacionar o ângulo de torção  $\varphi$  com a equação da linha elástica, da seguinte forma:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_y \cdot \sin(\varphi)}{E \cdot I}. \quad (63)$$

Esta deflexão transversal ocorre no plano  $xy$ . Observamos que  $M_y \sin(\varphi)$  é o momento gerador da flexão transversal, e é obtido com a projeção do  $M_y$  sobre o eixo  $z$ . Para ângulos pequenos, podemos fazer a aproximação:

$$\sin(\varphi) = \varphi.$$

Dessa forma, a Equação (63) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_y \cdot \varphi}{E \cdot I} = \frac{P \cdot x \cdot \varphi}{E \cdot I}, \quad (64)$$

em que o ângulo de torção  $\varphi$  pode ser apresentado na forma diferencial como:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot J}. \quad (65)$$

Derivando a Equação (65) com respeito a  $x$ , obtemos:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1}{G \cdot J} \frac{dT}{dx} = -\frac{P \cdot x}{G \cdot J} \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (66)$$

Da Equação (64) e da Equação (66), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= -\frac{P \cdot x}{G \cdot J} \frac{P \cdot x}{E \cdot I} \varphi \\ \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{P^2 x^2}{G \cdot J \cdot E \cdot I} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Através da Equação de Riccati (67) que modela o problema, podemos encontrar o ângulo de torção  $\varphi$ . Com as devidas mudanças de variáveis, podemos transformar esta equação na forma padrão da equação de Bessel com  $\nu = 1/4$ . As constantes arbitrárias serão obtidas pelas condições de contorno.

**Proposição 1.** Se aplicarmos na equação

$$x^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + (1 - 2\alpha)x \frac{d\varphi}{dx} + (\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} + \alpha^2 - \nu^2 \gamma^2) \varphi = 0, \quad (68)$$

as mudanças de variáveis:

$$t = \beta x^\gamma$$

$$\varphi = x^\alpha z,$$

então, encontraremos:

$$t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + t \frac{dz}{dt} + (t^2 - \nu^2) z = 0, \quad (69)$$

cuja solução é:

$$z(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t) \quad (70)$$

e a solução da Equação (68) é:

$$\varphi(x) = C_1 x^\alpha J_\nu(\beta x^\gamma) + C_2 x^\alpha Y_\nu(\beta x^\gamma). \quad (71)$$

A demonstração da Proposição 1 pode ser encontrada em (PEIXOTO; NASCIMENTO, 2021).

Quando aplicamos os valores

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2, \quad \beta^2 = \frac{P^2}{4G \cdot J \cdot E \cdot I} \text{ e } \nu = \frac{1}{4} \quad (72)$$

na Equação (68), obtemos a Equação (67) e sua solução é:

$$\varphi(x) = A \cdot \sqrt{x} \cdot J_{1/4}(\beta \cdot x^2) + B \cdot \sqrt{x} \cdot J_{-1/4}(\beta \cdot x^2), \quad (73)$$





em que  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias que podem ser determinadas pelas condições de contorno.

Na extremidade da viga ( $x = 0$ ), o momento torçor é nulo ( $T = 0$ ) e, portanto:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

A derivada de  $\varphi$  pode ser calculada utilizando as fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^{\nu\alpha} J_{\nu}(\beta x^{\alpha})] &= \beta\alpha x^{(1+\nu)\alpha-1} J_{\nu-1}(\beta x^{\alpha}) \\ \frac{d}{dx} [x^{-\nu\alpha} J_{\nu}(\beta x^{\alpha})] &= -\beta\alpha \cdot x^{(1-\nu)\alpha-1} J_{\nu+1}(\beta x^{\alpha}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\beta \cdot \sqrt[3]{x^2} [A \cdot J_{-3/4}(\beta \cdot x^2) - B \cdot J_{3/4}(\beta \cdot x^2)]. \quad (74)$$

A função  $J_{-3/4}(x)$  não está definida para  $x = 0$ . Dessa forma, a Equação (74) só faz sentido para  $A = 0$ . Segue que

$$\frac{d\varphi}{dx} = -B \cdot 2\beta \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot J_{3/4}(\beta \cdot x^2). \quad (75)$$

Por outro lado, uma outra condição de contorno é  $\varphi(L) = 0$  e assim, de acordo com a Equação (73), temos:

$$0 = B \cdot \sqrt{L} \cdot J_{-1/4}(\beta \cdot L^2).$$

Utilizando os comandos no Python:

```
import mpmath as *
mp.dps = 10; mp.pretty = True
findroot(lambda x: besselj(-0.25,x),
0.1, verify=False)
```

encontramos o valor do primeiro zero da função  $J_{-1/4}(x)$  e, dessa forma, temos:

$$J_{-1/4}(\beta \cdot L^2) = 0 \Rightarrow \beta \cdot L^2 = 2,006299672. \quad (76)$$

Substituindo na Equação (76) o valor de  $\beta$ , obtido na Equação (72), e isolando  $P$ , obtemos:

$$P = 4,012599344 \frac{\sqrt{G \cdot J \cdot E \cdot I}}{L^2}, \quad (77)$$

a solução do problema.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos que alguns conceitos da resistência dos materiais e o de curvatura de uma curva foram fundamentais para o estudo. Além disso, a modelagem através das

equações diferenciais foi a ferramenta capaz de descrevê-lo. Encontramos a EDO linear de segunda ordem homogênea (Equação de Riccati (67)), que por meio de mudanças de variáveis foi convertida na Equação de Bessel (69) que, por comparação com a Equação (68), obtivemos o parâmetro  $\nu = 1/4$  e, consequentemente, determinamos a solução em termos de funções de Bessel de primeira e segunda espécies (Equação (73)). Com este resultado, encontramos a carga crítica de flambagem lateral com torção de uma viga engastada (Equação (77)), um problema de instabilidade presente em vigas esbeltas sujeitas à aplicação de cargas.

## Referências

BARICZ, A. **Generalized Bessel Functions of the First Kind**. [S.l.]: Springer, 1994. ISBN 978-3-642-12229-3. Citado na página 2.

BEER, F. P. et al. **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. Porto Alegre, RS: AMGH Editora LTDA., 2011. ISBN 978-85-8055-008-5. Citado 4 vezes nas páginas 6, 8, 10 e 11.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1995. ISBN 978-85-216-2832-3. Citado na página 4.

BUTKOV, E. **Mathematical Physics**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1973. (Addison-Wesley Series in Advanced Physics). Citado na página 4.

GOMES, O. F. **Análise dos elementos fletidos em: Estruturas de aço**. Universidade de São Paulo, São Carlos, Sp, 1993. Citado na página 13.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 978-85-7605-373-6. Citado 8 vezes nas páginas 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 e 13.

IDRIS, F. A.; BUHARI, A. L.; ADAMU, T. U. **Bessel Functions and Their Applications: Solution to Schrödinger equation in a cylindrical function of the second kind and Hankel Functions**. *International Journal of Novel Research in Physics Chemistry & Mathematics*, Novelty Journals, Rajasthan, India, v. 3, 2016. Citado na página 5.

NASCIMENTO, P. H. R. d.; SANTOS, A. d. **Solução de um problema de flambagem de coluna utilizando equações de Bessel**. *Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas*, UFRB, v. 1, n. 1, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 2, 3, 4 e 5.

PEIXOTO, R. M. d. S.; NASCIMENTO, P. H. R. d. **Equações Diferenciais de Bessel e a Corrente Oscilante**. *Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas*, UFRB, v. 1, n. 2, 2021. Citado na página 14.

ROSSI, A. **Flambagem lateral com torção e distorção da alma em vigas de perfis I metálicos duplamente simétricos**. Universidade estadual de Maringá, Maringá, PR, 2018. Citado na página 13.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1983. ISBN 85-216-0247-2. Citado 3 vezes nas páginas 7, 8 e 10.



VASCONCELOS, A. C. D. **A origem das funções de Bessel com algumas aplicações em problemas estruturais.** Boletim Técnico do Departamento de Engenharia Estrutural e Fundações da EPUSP (BT/PEF-9006), 1990. Citado na página 1.

WATSON, G. N. **A treatise on the theory of Bessel functions.** [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9780521483919. Citado na página 5.

YOSHIDA, H.; MAEGAWA, K. **Lateral instability of I-beams with imperfections.** *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Japão, v. 110, n. 8, 1984. Citado na página 13.

ISSN:  
2763-8855



**RECET**  
Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas

